MATEMATIKA IR REALYBĖ

Prie kiekvieno rimto klausimo yra du priėjimai : filosofinis ir žurnalistinis. Filosofas stengiasi suvesti klausimų siūlus į sintezę — atsakyti *kodėl.* Žurnalistas patenkintas, jei jis gali iškelti klausimus, jei jis pajėgia nubrėžti įvykių eigą — atsakyti į klausimą *kaip.* Mano pranešimas bus žurnalistinis, ne filosofinis. Atsiprašydamas tegaliu tik tuo teisintis, kad ši klausimą būsiu priverstas studijuot visą gyvenimą, tad gal būtų neišmintinga rasti galutines išvadas.

Prieš imdami mikroskopą, pažvelkime į temą keliais piūviais. Tie piūviai būtų šie klausimai, kurie, kaip paralelės ant žemėlapio, nurodytų mūsų temos vietą. Dažnai girdimas klausimas : Ką naujo iš viso galima atrasti matematikoj ? Rečiau girdimi, bet gilesni : Ar matematiką galima laikyti gamtos mokslu ? Ką matematika gali pasakyti apie tikrovę ? Ką gamta gali pasakyti apie matematiką ?

Į matematikos ryši su tikrove žvelgsime pirmiausia istoriko žvilgsniu, stengdamiesi suprasti dabartines pažiūras iš jų istorinės kilmės. Iš arčiau pasižiūrėsime į vieną modernią matematikos apybraižą : matematiką, kaip formalių sistemų studiją. Po to gal jausimės drąsesni pažiūrėti į matematikos ryšį su realybe. Pagaliau bandysime rišti pažiūras į matematiką su sociologija.

Istorinis žvilgsnis. — Matematikos vaikystė ne taip jau varginga : Egipte taisykles žemės matavimui žinojo tik kunigų luomas. Babilonijoj žemės matavimą atlikinėjo vergai, bet už savo slaptą mokslą jie turėjo būti gilioj pagarboj laikomi. Matematika, kaip mokslas, pradedama graikų : Euklido geometrijos aksiomatizacija ir dabar kelia nuostabą. Kartu su logine kristalizacija matematika graikuose gauna ir priešingą, esoterikos-misticizmo atspalvį : tik prisiminkime Pitagorą ir skaičių harmonijas.

Naujieji amžiai pasižymi vis didesne realybės matematizacija. Ši raida, prasidėjusi su Galilėjų, kuris įsitikina, kad žemės kūnai juda pagal matematinius dėsnius, ir Kepleriu, kuris planetų judesiuose mato pasaulyje apsireiškiančią matematinę harmoniją, tiesiasi raudonu siūlu iki pat mūsų dienų. René Descartes grindžia net ir filosofiją tiesomis, kurios būtų tokios pat aiškios, kaip ir geometrijos aksiomos. Spinoza etiką pristato aksiomų ir teoremų pavidalu. Newtono mechanika užkariauja fiziką.

Nuo Newtono jau sunku atskirti, kur baigiasi matematika ir kur prasideda fizika. Pati matematika lyg suvedama į mechaniką : prisiminkime tik didžiuosius vardus : Bernouilli, Lagrange, Laplace, Euler, Jacobi, Gauss.

Keista, bet matematikos išsilaisvinimas nuo fizikos ir fizikos pagrindų sukrėtimai branduolio teorijoje ateina beveik kartu. Su didžiuoju vokiečių matematiku David Hilbert rimtoji matematika pasidaro abstrakčioji matematika. Gi jei Hilberto asmenyje abstrakčioji matematika randa pranašą, tai Bourbaki asmenyje randa prancūziškos elegancijos apaštalą.

Šių dienų abstrakčioji — grynoji — matematika sprendžia klasikinius uždavinius naujais, elegantiškais metodais. Naujoji matematika yra «mažiau apskaičiavimo, daugiau sąvokų» nusistatymo matematika. Naujųjų metodų pagrinde yra « formalios sistemos sąvoka. Prie jos ir stabtelkim, nes pačią matematiką apibrėšim, kaip mokslą apie formalias sistemas.

Matematika kaip mokslas apie formalias sistemas. — Formalios sistemos apybraiža, kurią mes naudosime, yra įkvėpta Haskell B. Curry knygos *A Formalist Philosophy of Mathematics,* North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1951. Susidomėjusi klausytoją siunčiame susirasti knygą : joje daugiau detalių, daug pavyzdžiu.

Formali sistema susideda iš trijų dalykų : *simbolių, pagrindinių formulių* arba aksiomų ir *taisyklių*, kurios pasakytų, kaip sudaryti priimtinas formules. Paimkime kiekvieną iš šių dalykų atskirai. Kad būtų lengviau mūsų argumentus sekti, kartu pristatysim ir formalios sistemos pavyzdi. Šioji sistema yra labai paplitusi moderniojoj algebroj — tai *grupės* sąvoka.

Pirmasis indėlis į formalios sistemos receptą yra simboliai. Patogumo dėliai atskiriame dviejų rūšių simbolius : objektus ir jungtukus (arba operacijas). Mūsų statomai *grupės* sistemai mes naudosime objektams mažąsias raides : *a, b, c, d, ..., x, y, z*. Jungtuką turėsime tik vieną : jam naudosime žvaigždutės * simbolį. Šalia šių simbolių pasiliekame teisę naudoti standartinius loginius simbolius, pavyzdžiui, lygybės ženklą = , skliaustelius ( ).

Antroju indėliu į formalios sistemos receptą eina rinkinys pagrindinių formulių, arba aksiomų. Šiuo atveju turėsime tik tris aksiomas. Jas išreikšime, naudodami lygybės ženklą. Aksiomas supraskime šitaip : kairėje pusėje esanti formulė yra mūsų sistemoje laikoma lygi dešinėje lygybės ženklo stovinčiai formulei. Pavadinkime mūsų sistemą G (nuo *grupė).* Štai tos aksiomos :

Aksioma 1. Jei $a, b, c,$ yra trys objektai iš G, tai

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Aksioma 2. G turi bent vieną objektą e su šia savybe: jei a yra objektas iš G, tai

$$e * a = a.$$

Aksioma 3. Jei a yra objektas iš G, tai kur nors tarp G objektų yra bent vienas x su šia savybe:

$$x * a = e.$$

Trečiasis įnašas į formalios sistemos receptą yra taisyklės. Mūsų sistemai turėsime dvi grupes taisyklių. Vieną grupę taisyklių sudarys tos, kurios lies pačią G. Antrą grupę taisyklių sudarys priimtos loginės argumentacijos taisyklės : jų čia neminėsime, — jas taip pat galima formalizuoti, — tą jau yra padarius simbolinė logika. Grįžtam prie pirmosios grupės taisyklių: šios taisyklės mums turės pasakyti, kurios formulės yra taisyklingai padarytos. Čia mes laikysimės tradicijos : pavyzdžiui, $(a * b) * (c * d)$ skaitysim gerai padaryta formule, gi $* * (* a * b)$ skaitysim mūsų reikalams bereikšme. Preciziškai kalbant, mes tai galime išreikšti taip:

Receptas geroms formulėms gaminti:

1. Jei a priklauso G, tai a yra gera formulė,
2. Jei P ir Q yra geros formulės, tai (P) * (Q) yra gera formulė.

Mes skaitysime tik tas formules geromis, kurios padarytos pagal šį receptą. Pavyzdžiui, visos formulės, kurios randasi aksiomose yra geros formulės.

Esame, štai, sukūrę formalią sistemą. Atsikvėpimui galime sutraukti tai, ką mes esame sakę apie formalias sistemas, padarydami palyginimą su kalba. Kiekviena formali sistema susideda iš trijų daliu: *simbolių* (kaip kalba iš žodžiu), *pagrindinių formulių* — aksiomų (kalboje sinonimai, išsireiškimai) ir *taisyklių* geroms formulėms sudaryti (kalboje — sintaksė).

Toks formalinės sistemos pristatymas paduoda tik jos griaučius. Matematikas žiūri į aksiomas ir bando surasti, kokias išdavas jos savyje slepia. Pažvelkime į mūsų *grupę* G. Aksioma 2 sako, kad yra elementas e, kuriuo « daugyba » iš kairės yra lyg dauginimas iš vieneto (dėl to e ir vadinama *kairės vienetas).* Klausimas : ar gali būti du skirtingi kairės vienetai ? Ar yra dešinės vienetų ? Kokie ryšiai tarp kairės ir dešinės vienetų ?

Po ilgesnio stebėjimo matematikas prieitų išvados, kad tėra vienų vienas vienetas mūsų *grupėj* G; daugiau — jis yra ir kairės, ir dešinės vienetas. Štai jo teigimų įrodymas : Pirmiausia pastebėkime, kad mūsų sistemoj G yra įmanoma « dalyba » :

Lemma 1. Jei a, b, c yra simboliai iš G, ir jei $a * b = a * c$, tai $b = c$.

Įrodymas labai paprastas. Aksioma 3 sako, kad yra objektas x, kuris turi savybę $x * a = e$. Tada $x * (a * b) = (x * a) * b = e * b = b$, kur mes naudojom paeiliui Aksiomas 1 ir 2. Taipogi $x * (a * c) = c$, bet mes prileidom kad $a * b = a * c$, todėl $x * (a * b) = x * (a * c)$, kas rodo $b = c$.

Lemma 2. Jei a yra iš G, tai $a * e = a$.

Su šiuo rezultatu mes atsakom vieną klausimą — čia matom, kad kairys vienetas yra taip pat ir dešinys vienetas. Įrodymas yra labai paprastas. Kadangi turime Lemma 1, mums užtenka įrodyti, jei mums tai patogu, sekantį faktą: paimkime y iš G ir įrodykim, kad $y * (a * e) = y * a$. Tvarkoj, leiskim $y = x$, tam objektui (jei yra keli, paimkim vieną), kuriam $x * a = e$. Mes žinom, kad $e * e = e$ (kodėl ?), todėl $(x * a) * e = x * a$, bei tai reiškia tą pat (kodėl ?) kaip $x * (a * e) = x * a$. Iš Lemma 1 sužinome, kad iš to seka $a * e = a$.

Lemma 3. Jei e ir f abu yra kairės vienetai iš G, tai tada $e = f$.

Įrodymas dabar juokingai lengvas. Žiūrėkime į f. Jis yra kairės vienetas, todėl Lemma 2 sako, kad jis yra taip pat ir dešinės vienetas. Todėl $e * f = e$. Bet e yra kairės vienetas, todėl $e * f = f$. Todėl $e = f$, kas ir reikėjo įrodyti.

Kyla klausimas: iš kur ištraukta pati *grupės* sąvoka ? Ar tai tik žaislas, ar ji kokiu nors kitu būdu svarbi ? Atsakymas labai paprastas : *grupės* sąvoka brendo arti šimto metų. Prieš atsirandant abstrakčiai grupei, buvo privisę « konkrečių » grupių : geometrinių figūrų simetrijų grupių (štai lygiašonio trikampio simetrijų grupė turi šešis elementus), permutacijų grupių, vektorialinių erdvių transformacijų grupių. Kiekvienai šiai grupių giminei buvo sugalvoti atskiri savybių įrodymai — tačiau, atsiradus abstrakčios grupės sąvokai, buvo pastebėta, kad visus tuos įrodymus galima atlikti iš karto — užtenka tik pastebėti, kad jie galioja abstrakčios *grupės* G sistemoj.

Matematika ir yra mokslas apie formalias sistemas. Formalinių sistemų «tiesa » nieko bendro su realybe neturi — ta prasme matematikos studijos apie realybę nieko nepasako. Matematikos teoremos yra nuo realybės nepriklausomos. Tokiu būdu matematika nėra gamtos mokslas.

Tačiau mes užmiršome, kad matematiką kuria žmonės. Kaip matysime, čia ir randasi matematikos ryšys su realybe.

Ryšys su tikrove. — Jei matėme, kad matematikos turinį galėtų studijuoti ir Marso gyventojai, jei sutinkame, kad matematikos teoremos nepriklauso nuo to, ar žemė apvali, ar plokščia, vis tiek turime pripažinti, kad pirmąjį akstiną matematikai duoda gamtinė tikrovė. Paimkime natūralaus skaičiaus : 1, 2, 3, ... sąvoką — kiek daug laiko ir įtampos iš žmogaus pareikalavo tos sąvokos iškėlimas. Pirmasis žingsnis buvo sunkiausias — tolimesnės abstrakcijos lengvai eina. Kiek tas svarbus buvo žingsnis, rodo vokiečio matematiko Kronecker pasakymas: «Dievas sukūrė natūralius skaičius; žmogus atliko visa kita». Paimkime vektorialinius dydžius : nuo sąvokos, kuri buvo sukirpta mechanikai, dabar esame patekę į aukštai išvystytas begalinių matavimų erdvių teorijas.

Kaip matėme istorinėje apžvalgoje, matematikai naujaisiais amžiais buvo vaisingas ryšys su gamtos mokslais, ypač fizika. Galilėjo mintis aprašyti fenomenus matematinėm formulėm fiziką privedė prie didelių laimėjimų. Kaip teorijoj pritaikoma matematika ? Štai fizikas turi duomenis, kurie liečia kokį tai nors gamtos fenomeną. Jis bando juos kuo tiksliau aprašyti matematinėm formulėm — jis renkasi tą matematinę teoriją, kurios išvados turės geriausią sąskambį su jo gautais faktais. Fizikas nėra įsipareigojęs naudoti kurią nors matematinę sistemą — štai klasikinei mechanikai tiko Euklidinė geometrija; relatyvistinei mechanikai geriau tinka Lorentzo geometrija.

Deja, šis kelias ne vien rožėmis grįstas. Kalbėdami apie matematiką, dažnai sutapatiname savo dienų matematiką su visu potencialiu matematikos mokslu. Iš tikrųjų žinome tik mažą mažą dalelę dalykų apie pačias paprasčiausias formalias sistemas. Mes ir šiomis dienomis teturime tik mažą dalelę tų įrankių, kuriuos turėtume turėti, kad galėtume liesti gamtinę tikrovę, netempdami jos į Prokrusto lovą. Matematiniai metodai — aštrūs akiniai; bet ir tobuliausi stiklai yra linkę vaizdą iškreipti. Todėl matematika ir gamtos mokslai yra skirti gyventi nuolatinėj įtampoj: matematika dėl to, kad iš konkrečių pritaikymų kyla problemos, kurios gimdo formalines idėjas; fizika dėl to, kad bent šiom dienom nėra kito įrankio, kaip matematika; net ir sugalvojus naują sąvokinę sistemą, jei tik ji turėtų loginę struktūrą (gi kitaip — chaosas), matematika čiuptų ją studijuoti ir daryti abstrakcijas. Su liūdesiu turime pripažinti kartu su Bergsonu, kad geometrinės sąvokos uždeda akinius ne tik filosofijai, bet ir fizikai.

Pažiūros į matematiką ir sociologiją. — Įdomu į šį ryšį su gamtos mokslais žiūrėti iš sociologinės pusės. Jau pirmu žvilgsniu matome tam tikrus ciklus nuomonėse apie matematikos nepriklausomybę nuo realybės.

Štai Egipto stadijoje matematika buvo savarankiška magikos dalis — pritaikymai realybei buvo lyg palenkimas aukšto prado tarnauti žemesniam.

Babilone — priešingai. Matematika — amatas, be teoretinio pagrindo, be savarankiško pasiteisinimo.

Graikijoj — gėris savyje. Su Platonu matematika pakyla į aukštesnę, idėjinę realybę. Matematika gamtoje įsikūnija netobulai, nes gamtinis pasaulis — tik netobulas šešėlių pasaulis.

Romėnai — praktikai: matematika tik grūdų maišams, mokesčiams skaičiuoti.

Renesansas — matematika kaip menas. Nenuostabu, kad Leonardo da Vinci neužmiršo ir matematikos.

Aštuonioliktasis šimtmetis — matematikos vos nepraryja mechanika. Matematika darosi fizikos dalis.

Devynioliktasis — dvidešimtojo pirmoji pusė: išbujoja abstrakčioji matematika, ne-euklidinės geometrijos, naujoji algebra.

Iš šių istorinių vinječių matoma koreliacija tarp liuksuso ir matematinės nepriklausomybės nuo fizikos ? Ar tai tik atsitiktinumas ? Drįstame teigti, kad ne, o savo teigimą kaip tik ir remsime matematikos ir realybės santykių analize.

Anot anglo matematiko ir filosofo Alfred North Whitehead, mokslas pergyvena idėjinio entuziazmo ir kruopštaus, bet sauso darbo ciklus. Didelė idėja mokslo sritį uždega, jos liepsna šildo kelias tos srities darbininkų generacijas, gi su metais jos šiluma išsisemia. Norėtume matyti matematikos « vergijos » laikotarpiuose tuos idėjinio brendimo perijodus: artimas ryšys su gamtos mokslu, nuolatinis galvojimas apie fizines problemas, kurios reikalauja naujų metodų jų sprendimui — ugdo naujas sąvokas, kurios įstengia uždegti matematiką tam šimtmečiui. Gi užsidegimas yra rišamas ir su egotizmu : nepabrėžus nepriklausomybės ir darbas ne toks malonus.

Ryšys su liuksusu ? Matematika yra liuksusas. Duoti žmones, kurie galėtų studijuoti formalines abstrakcijas, tegali tik labai turtinga ir savimi pasitikinti visuomenė. Pripratusią prie liuksuso visuomenę nesutrenkia nei matematikų pasigyrimas, kad matematika yra ne mokslas, o tik žaidimas. Nenuostabu, o tačiau keista — juk tai yra pati teisybė.

Arūnas Liulevičius

Chicaga, J. A. V.